MATHEMATIQUES

Barème : Exercice I = 4 points
Exercice II = 6 points
Problème = 10 points

Durée : 4 heures
Coeff. : 4
(Bac Technique, Coeff. 3)

EXERCICE I

Dans une urne il y a dix boules numérotées de 0 à 9

(1) On tire simultanément deux boules de cette urne. On suppose tous les tirages équiprobables et on appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le plus petit des deux nombres portés par les deux boules

a) Quelle est la loi de la probabilité de X ?

b) Calculer l'espérance et la variance de X

(2) On tire maintenant une boule de l'urne contenant les dix boules numérotées de 0 à 9 et on appelle Y la variable aléatoire qui associe à chaque nombre porté par la boule tirée le reste de sa division par 2, de même on appelle Z la variable aléatoire qui associe à chaque nombre porté par la boule tirée le reste de sa division par 3.

a) En supposant l'équiprobabilité des tirages d'une boule construire le tableau de la loi conjointe du couple (Y,Z)
Indiquer sur ce tableau les lois marginales

b) Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

c) Calculer la covariance du couple (Y,Z)

NB. On rappelle que si $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + .. + n^k$ $(k \in \mathbb{N})$

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et que} \quad S_3 = (S_1)^2$$

EXERCICE II

A) On considère l'ensemble $\mathcal{M}_2$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2$ vérifiant les conditions suivantes

$\forall k \in \mathbb{R}$ $M \neq kI$ et $M^2 + 6M = 6I$ I matrice unité de $\mathcal{M}_2$

(1) Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2$ combinaisons linéaires de M et de I qui sont égales à leur carré

(2) On désigne par $\mathcal{L}$ l'ensemble de ces matrices, donner la table de multiplication de $\mathcal{L}$

(3) Quelles sont les matrices de $\mathcal{L}$ qui sont inversibles ?

B) On considère l'ensemble $\mathcal{M}_3$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. Soit M un élément de $\mathcal{M}_3$ vérifiant la propriété "P" suivante

"P" $\ll \exists (a\ b) \in \mathbb{R}^2 \quad \exists c \in \mathbb{R}^* \quad aM^2 + bM = -cI \gg$ I matrice unité de $\mathcal{M}_3$

① Montrer que M est une matrice inversible

② Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Montrer que M vérifie la propriété "P"

b) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ Exprimer M^n en fonction de n, I et J

c) Donner l'expression de M^n sous forme d'une matrice

PROBLEME : Les parties de ce problème sont largement indépendantes

Partie A

1°) a) Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le système

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ p + q = m \end{cases}$$

b) Déterminer p et q solution du système dans le cas où $m = \frac{9}{2}$ et $p < q$

2°) Soit la fonction numérique h_p définie sur $[0, +\infty[$ telle que

$u \rightsquigarrow h_p(u) = \frac{u^p}{p} - uv$ où $v \geq 0$

a) Etudier les variations de h_p pour la valeur de p trouvée dans 1°) b

b) Etudier les variations de h_p pour $p \in]1, +\infty[$

c) Déduire que $\forall u \geq 0 \quad \forall v \geq 0$

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \text{ si } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ et si } p > 1.$$

Partie B

1°) Soit f la fonction numérique définie sur $[0, a]$ telle que

$$x \rightsquigarrow f(x) = x^2 + 2x$$

.../...

a) Montrer que f est une application bijective et définir g application réciproque de f

b) On considère la fonction F définie sur $[\,o, a\,]$ telle que

$$x \rightsquigarrow F(x) = \int_o^x f(t)dt + \int_o^{f(x)} g(t)dt - xf(x)$$

Etudier les variations de F

2°) Soit f une fonction numérique continue dérivable positive et strictement croissante sur $[\,o, a\,]$ telle que $f(o) = o$

On désigne par g la réciproque de f

On considère la fonction F définie sur $[\,o, a]$ telle que

$$F(x) = \int_o^x f(t)dt + \int_o^{f(x)} g(t)dt - xf(x)$$

a) Montrer que F est dérivable et calculer $F'(x)$
En déduire $F(x)$

b) Montrer que si $o \leqslant u \leqslant a$ et $0 \leqslant v \leqslant f(a)$ alors

$$uv \leqslant \int_o^u f(t)dt + \int_o^v g(t)dt$$

c) En utilisant ce résultat, retrouver le résultat

$$\forall u \geqslant o \quad \forall v \geqslant o \quad uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \text{ si } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ et si } p > 1$$

Partie C

① Soit h une fonction numérique et continue sur $\mathbb{R}$

a) comparer $\int_a^b h(x)dx$ et $\int_a^b h(a + b - x)dx$

b) En déduire $I = \int_o^{\pi/4} \text{Log}(1 + \text{tg } x)\, dx$

c) Etablir que $\int_o^{2a} h(x)dx = \int_o^a [h(x) + h(2a - x)]\, dx$

② On considère deux fonctions f et g définies et continues sur $[\,a, b]$

On suppose f croissante et que g et $1 - g$ sont strictement positives

On pose $\ell = \int_a^b g(t)dt$

a) Etudier les variations de la fonction G définie par

$$x \rightsquigarrow G(x) = \int_a^x g(t)dt$$

.../..

b) Montrer que $\forall x \in [a,b]$ $\quad a + G(x) \leqslant x$

c) Comparer les fonctions φ et ψ définies par

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt \quad \text{et} \quad \psi(x) = \int_a^{a+G(x)} f(t)dt$$

En déduire que $\int_a^b f(t)g(t)dt \geqslant \int_a^{a+\ell} f(t)dt$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail